Ekstrema lokalne funkcji

Na początku przypomnijmy definicję maksimum i minimum lokalnego funkcji:

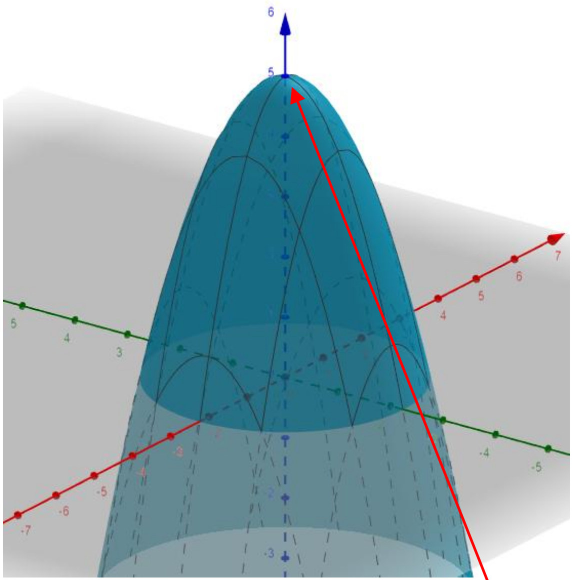
Definicja Funkcja f ma w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ **minimum lokalne**, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(P_0)$ tego punktu takie, że dla dowolnego $P = (x, y) \in S(P_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) > f(x_0, y_0).$$

Definicja Funkcja f ma w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ **maksimum lokalne**, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(P_0)$ tego punktu takie, że dla dowolnego $P = (x, y) \in S(P_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Przykład. Rozważmy funkcję $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$.



Widzimy, że w punkcie (0;0) nasza funkcja ma maksimum lokalne. Aby wyznaczyć punkty podejrzane o ekstremum należy skorzystać z następującego twierdzenia:

Twierdzenie (warunek konieczny ekstremum) Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

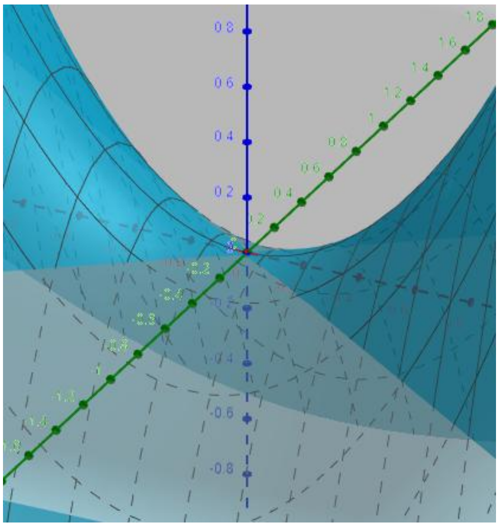
- ma ekstremum w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$,
- ma pochodne cząstkowe $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$,

to

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Oczywiście punkty spełniające powyższy układ równań nie muszą być ekstremami, aby się o tym przekonać policzmy pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y) = x^2 - 2y^2$. *Mamy* $f'_x(x,y) = 2x$ *i*

$f_y^{'}(x,y) = -4y$. *Widzimy, że w punkcie (0;0) nasze pochodne cząstkowe się zerują, a na poniższym wykresie widać, że nie ma tam ekstremum.*



Zdefiniujmy macierz Hessego, nazywaną hesjanem następująco:

$$\begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

<u>Twierdzenie</u>. *Jeżeli funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu w $P_0(x_0; y_0)$ oraz wyznacznik hesjanu jest dodatni, to funkcja ma ekstremum w punkcie $P_0(x_0; y_0)$, oraz gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, to funkcja ma minimum lokalne, a gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, to funkcja ma maksimum lokalne.*

Policzmy teraz ekstrema lokalne dla funkcji $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$.

```
syms x y     %deklarujemy zmienne
f=x^3+y^3-9*x*y;      %deklarujemy funkcję
fx=diff(f,x)          %obliczamy pochodne cząstkowe
fy=diff(f,y)
[X,Y]=solve(fx,fy)    %rozwiązujemy układ równań
```

Otrzymujemy punkty

```
X =

                        0
                        3
   (3^(1/2)*3i)/2 - 3/2
 - (3^(1/2)*3i)/2 - 3/2


Y =

                        0
                        3
 - (3^(1/2)*3i)/2 - 3/2
   (3^(1/2)*3i)/2 - 3/2
```

Warto zwrócić uwagę, że tablica X zawiera współrzędne x, a tablica Y zawiera współrzędne y. Otrzymaliśmy 4 punkty, dwa rzeczywiste i dwa zespolone. Nas interesują punkty rzeczywiste, więc otrzymaliśmy dwa punkty podejrzane o istnienie ekstremum: $P_1 = (0;0)$, $P_2(3;3)$.

Tworzymy Hesjan i funkcję g (wyznacznik macierzy Hessego):

```
fxx=diff(fx,x)
fyx=diff(fx,y)
fxy=diff(fy,x)
fyy=diff(fy,y)
H=[fxx fxy; fyx fyy]
g=det(H)
```

```
H =

[ 6*x,   -9]
[  -9,  6*y]


g =

36*x*y - 81
```

Obliczamy wartość funkcji g w punktach podejrzanych o istnienie ekstremum.

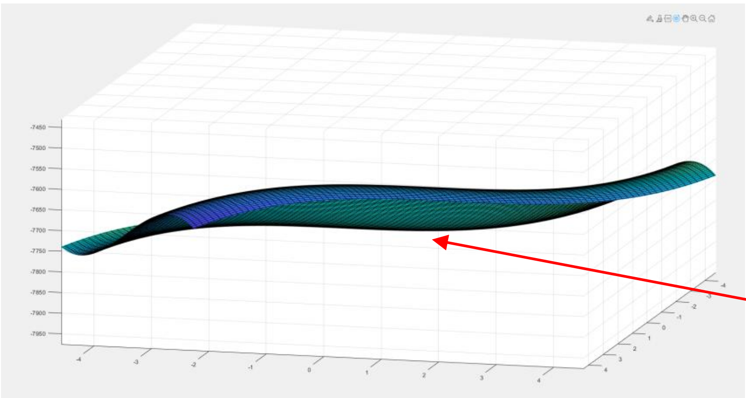
```
subs(g,{x,y},{X(1),Y(1)})
subs(g,{x,y},{X(2),Y(2)})
```

```
ans =

-81


ans =

243
```

Widzimy, że w punkcie P_1 nie ma ekstremum, a w punkcie P_2 jest. Policzmy jeszcze jakie ekstremum mamy w punkcie P_2.

```
>> subs(fxx,{x,y},{X(2),Y(2)})

ans =

18

>> subs(f,{x,y},{X(2),Y(2)})

ans =

-27
```

Widzimy, że jest minimum lokalne i wynosi -27. Na koniec zadania narysujmy wykres naszej funkcji.



Nasze minimum lokalne

Zadanie 3. Wykorzystując program Matlab wyznacz ekstrema lokalne poniższych funkcji oraz sporządź ich wykresy.

- $f(x,y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,
- $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$,
- $f(x,y) = e^{\frac{x}{3}}(x + y^2)$.